Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ No. 1 Date 06/12/2019

$\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό.

Η $\bar{f}$ λέγεται διαφορίσιμη στο $\bar{x}$

$$:\Leftrightarrow \exists\, D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

έτσι ώστε

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = \bar{0} \in \mathbb{R}^m$$

ιδιότητα ορίου διανυσμ. συναρτ. $\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \dots, m$: $\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{f_j(\bar{x}+\bar{h}) - f_j(\bar{x}) - (d_{j1} \cdots d_{jn})\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = 0$ $(\in \mathbb{R})$

$= g_j(\bar{h})$

ορισμός $\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \dots m$: f_j διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, με $\bar{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$

$: U \to \mathbb{R}(=\mathbb{R}^1)$ [$=\mathbb{R}^m$ με $m=1$]

[Άρα $f: U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \exists \underbrace{(\tilde{d}_1, \dots \tilde{d}_n)}_{=\tilde{d}} \in \mathbb{R}^n$ $\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}) - \tilde{d} \cdot \bar{h}}{\|\bar{h}\|} = 0$.

Θεώρημα 3.21: $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$.

$\Rightarrow$ (α) $\bar{f}$ είναι συνεχής στο $\bar{x}$ [Προηγ. μάθημα]

(β) $\bar{f}$ είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ με $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x}) = d_{ji}$ $\forall j = 1, \dots m$ $\forall i = 1, \dots n$

$\Rightarrow$ ο πίνακας $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ του ορισμού είναι ο μοναδικός Ιακωβιανός πίνακας $J\bar{f}(\bar{x})$

Δηλ. $\bar{f}$ διαφ. στο $\bar{x}$ $\Rightarrow$ $D = J\bar{f}(\bar{x})$

Στην περίπτωση αυτή και μόνο τότε ο Ιακωβιανός πίνακας $J\bar{f}(\bar{x})$ ονομάζεται παράγωγος της $\bar{f}$ στο $\bar{x}$.

[ή διαφορικό της $\bar{f}$ στο $\bar{x}$] και συμβολίζεται με $D\bar{f}(\bar{x})$ [$= J\bar{f}(\bar{x})$].

Αν η $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, είναι διαφορίσιμη (:$\Leftrightarrow$ είναι διαφορίσιμη $\forall \bar{x} \in U$) τότε η απεικόνιση $\underset{U}{\bar{x}} \mapsto D\bar{f}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ονομάζεται παράγωγος [ή διαφορικό] της $\bar{f}$

Ειδικότερα: για $m=1$. Αν $f: U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε $Df(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \in (\mathbb{R}^{1\times n} =) \mathbb{R}^n$. Από την παρατήρηση στον πρώτο πίνακα (πιο πάνω).

Αν $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m$ διαφ. στο $\bar{x}$ τότε $Df(\bar{x}) = \begin{pmatrix} Df_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ Df_m(\bar{x}) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = J_{\bar{f}}(\bar{x})$$

(Και γενικά $\forall j=1,\dots,m$: f_j διαφ. στο $\bar{x}$) [Και αντίστροφα].

Απόδειξη (του (b) στο 2.3.21)

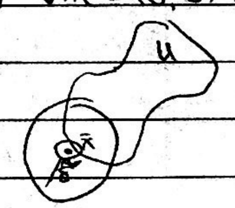
Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, αρκεί ν.δ.ο. $\forall j=1,\dots,m$: ισχύει $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x}) = \underset{\in \mathbb{R}}{d_{ji}}$, $\forall i=1,\dots,n$

Έχουμε $\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \dfrac{f_j(\bar{x}+\bar{h}) - f_j(\bar{x}) - (d_{j1} \dots d_{jn})\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = 0$

$(\forall j=1,\dots,n)$

$\Rightarrow$ για $\delta_0>0$ με $B(\bar{x},\delta_0)\subseteq U$ (αφού το U ανοικτό) ισχύει $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta\in(0,\delta_0)\ \forall \bar{h}\in B(\bar{0},\delta)\setminus\{\bar{0}\}$:

$$\left| \frac{f_j(\bar{x}+\bar{h}) - f_j(\bar{x}) - (d_{j1}, \dots, d_{jn})\bar{h}}{\|\bar{h}\|} \right| < \varepsilon$$



$$\left[\underbrace{\bar{h}\in B(\bar{0},\delta)\setminus\{\bar{0}\}}_{\Leftrightarrow\, 0<\|\bar{h}\|<\delta} \Leftrightarrow \underbrace{\bar{x}+\bar{h}\in B(\bar{x},\delta)\setminus\{\bar{x}\}}_{\Leftrightarrow\, 0<\|\bar{x}+\bar{h}-\bar{x}\|<\delta<\delta_0} \right]$$

$\Rightarrow$ για $\bar{h} = h\bar{e}_i$, $i=1,\dots,n$ $(h\in\mathbb{R})$: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\in(0,\delta_0)\ \underbrace{\forall h\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)}_{\Leftrightarrow\, 0<|h|<\delta}$:

$$\frac{|f_j(\bar{x}+h\bar{e}_i) - f_j(\bar{x}) - d_{ji}h|}{|h|} < \varepsilon$$

$0<\|\bar{h}\|<\delta$

$\Leftrightarrow 0 < \underbrace{\|h\bar{e}_i\|}_{=|h|} < \delta$

$\overset{\text{ορισμός}}{\Leftrightarrow} \lim_{h\to 0} \dfrac{f_j(\bar{x}+h\bar{e}_i) - f_j(\bar{x}) - d_{ji}h}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{f_j(\bar{x}+h\bar{e}_i) - f_j(\bar{x})}{h} = d_{ji}$

$\Leftrightarrow \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar x)$
↑ ορισμός

Παρατήρηση: Αν ερωτηθούμε αν δοσμένη $\bar f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, είναι διαφ. στο $\bar x \in U$, υπολογίζουμε στο $\bar x$ τον Ιακωβιανό πίνακα

$$J\bar f(\bar x) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar x)\right)_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le i\le n}}$$

[δηλ. κάνουμε για τις πραγματικές συν. f_j ως προς την πραγμ. μεταβλ. x_i (κρατώντας τις άλλες σταθερές στο $\bar x$)]

και ελέγχουμε αν ισχύει $\lim_{\bar h \to \bar 0} \frac{\bar f(\bar x+\bar h)-\bar f(\bar x)-J\bar f(\bar x)\bar h}{\|\bar h\|} = \bar 0$. Αν ναι,

τότε η $\bar f$ διαφ. στο $\bar x$ με παράγωγο $D\bar f(\bar x) = J\bar f(\bar x)$

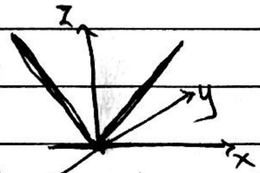
Αν όχι, τότε η $\bar f$ είναι στο $\bar x$ μερικώς διαφορίσιμη ($\Leftrightarrow \exists\, J\bar f(\bar x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$) αλλά όχι διαφορίσιμη [Αν δεν υπάρχει Ιακωβιανός τότε όχι μερ. διαφ.]

Μέχρι στιγμής είδαμε: $\bar f$ διαφ. στο $\bar x \Rightarrow \begin{cases} \bar f \text{ συνεχής στο } \bar x \\ \quad ① \not\Downarrow \quad \not\Uparrow ② \\ \bar f \text{ μερικώς διαφ. στο } \bar x \end{cases}$

$\not\Leftarrow$ ③

$\boxed{m=1}$

① $f(\bar x) = \|\bar x\|$



συνεχής (στο $\mathbb{R}^n$), όχι μερικώς διαφ. στο $\bar 0 \Rightarrow$ όχι διαφ. στο $\bar 0$ [βλ. προηγ. μάθημα]

② $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ για $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0)=0$, όχι συνεχής στο $\bar 0$.

αλλά (και) μερικώς διαφ. στο $\bar 0$ [βλ. προηγ. μάθημα]

③ $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ με $f(0,0)=0$ συνεχής στο $(0,0)$, μερ. διαφ. στο $(0,0)$, αλλά όχι

διαφ. στο $(0,0)$ [με $\nabla f(0,0) = (0,0)$]

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφ. στο $(0,0) \Leftrightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f((0,0)+(x,y)) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \ \nexists$$